Texte 1 , Choix intertemporel du consommateur

Microéconomie 3-851-84

1. Présentation générale du contexte intertemporel

La théorie du comportement du consommateur telle que nous l'avons vue jusqu'à présent, étudiait la répartition du revenu entre des biens de différentes natures. Le cadre d'analyse jusqu'ici employé était un cadre statique, où les décisions du consommateur ne concernaient qu'une seule "période" (dans la mesure où une telle période peut être définie). Nous nous proposons ici d'étendre le modèle, afin de prendre en compte la dimension temporelle liée aux choix du consommateur.

L'extension de la théorie du consommateur à un cadre temporel implique l'utilisation de concepts additionnels tels l'actualisation, les taux d'intérêt, l'épargne et l'emprunt.

Le modèle intertemporel suppose implicitement un certain nombre d'hypothèses. Premièrement, le consommateur connaît tous ses besoins futurs, toutes ses ressources, ainsi que les prix actualisés de tous les biens. De plus, en pratique, cela suppose qu'il est possible de conclure des contrats à terme, c'est-à-dire de vendre ou d'acheter à terme n'importe quelle quantité d'un bien, et ce, pour n'importe quelle période. Ces hypothèses, bien que peu réalistes, sont pour l'instant indispensables. Subséquemment, nous relâcherons certaines de ces hypothèses lorsque nous aborderons le problème du consommateur dans sa perspective temporaire.

2. La fonction d'utilité intertemporelle

À l'intérieur du cadre intertemporel, les biens se caractérisent par leurs natures physiques différentes (h), mais aussi par la période à laquelle ils sont disponibles (t). Par exemple, un voyage à la période t est un bien distinct d'un voyage à la période t+1. Il est donc nécessaire d'utiliser un indice double (ht) pour désigner tous les biens de l'économie.

Considérons un individu dont la consommation porte sur T périodes. Nous nous intéressons à la répartition de sa consommation pour les périodes allant de t=0 à t=T-1[1]. La période t=0 désigne la période courante (aujourd'hui), les autres périodes étant des

[1] Par exemple, si T=4 périodes, ces quatre périodes sont les suivantes: t=0, t=1, t=2 et t=3.

périodes futures[2].

Les préférences de l'individu à l'égard des différents biens x_{ht} peuvent se représenter par sa **fonction d'utilité intertemporelle**. Elle s'écrit:

$$u(x_{10}, x_{20}, ..., x_{h0}, ... x_{H0}; x_{11}, x_{21}, ..., x_{h1}, ..., x_{H1};$$
$$...; x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{ht}, ..., x_{Ht}; ...; x_{1T-1}, x_{2T-1}, ..., x_{hT-1}, ... x_{HT-1})$$

dans le cas général d'une économie comportant H biens. Pour simplifier l'écriture, nous noterons $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{Ht})$ le vecteur de consommation à la période t.

La fonction d'utilité intertemporelle s'écrit maintenant:

$$u(x_0, x_1, ..., x_t, ..., x_{T-1})$$

Cette fonction satisfait aux hypothèses usuelles que nous avons déjà rencontrées.

3. La contrainte budgétaire intertemporelle

Le consommateur choisit son plan de consommation $(x_0, x_1, ..., x_t, ..., x_{T-1})$, de manière à ce que ses dépenses de consommation respectent sa contrainte de richesse.

La contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit:

$$\sum_{t=0}^{T-1} p_t x_t = W$$

où p_t est le vecteur de prix à la période t actualisés à la période 0; et W est la **richesse** du consommateur pour l'ensemble des T périodes. La richesse d'un consommateur peut s'interpréter comme étant la valeur actualisée de tous ses revenus présents et futurs.

Selon les hypothèses du modèle, le consommateur établit maintenant son plan de consommation pour les T périodes de sa vie et, pour ce faire, il connaît tous les prix actualisés p_t et sa richesse W.

[2] Remarquez que la valeur prise par l'indice t nous indique le nombre de périodes "dans le futur" et, par conséquent, correspond exactement au nombre de périodes d'actualisation.

4. Le choix intertemporel optimal

Le choix du consommateur peut être analysé de façon très analogue à celui du cadre statique. Le choix du consommateur ($x_0,x_1,...,x_t,...,x_{T-1}$) s'obtient en maximisant son utilité intertemporelle tout en respectant sa contrainte budgétaire intertemporelle.

Il faut résoudre

$$Max U(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_t, \ldots\ldots x_{T-1})$$

$$sujet à \sum_{t=0}^{T-1} p_t x_t = W$$

5. Une interprétation du modèle intertemporel: le modèle de Fisher

Pour décrire le comportement intertemporel du consommateur, il peut être utile de raisonner à l'aide d'un modèle simplifié où l'horizon économique du consommateur se limite à deux périodes: la période courante t=0 et la période future t=1. Aussi, il peut s'avérer nécessaire de travailler avec des variables non-actualisées. Ainsi, nous définissons

$\overline{p}_0$ et $\overline{p}_1$ les vecteurs de prix <u>non-actualisés</u> aux périodes 0 et 1;

R_0 et R_1 le revenu <u>non-actualisé</u> des périodes 0 et 1;

i le taux d'intérêt nominal qui prévaut de la date 0 à la date 1;

et 1/(1+i) le facteur d'actualisation qui actualise les valeurs de la période 1 à la période 0.

Nous avons vu précédemment que la richesse du consommateur est en réalité la valeur actualisée de ses revenus présents et futurs. Remplaçons donc W par :

$$W = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

Également, puisque le produit du vecteur de consommation x_t et du vecteur de prix non-actualisés $\overline{p}_t$ représente le montant des dépenses de consommation de l'individu pour la période t, définissons:

$C_0 = \overline{p}_0\, x_0$ les dépenses de consommation courante et $\quad C_1 = \overline{p}_1 \, x_1 \quad$ les dépenses de consommation future non-actualisées.

5.1 Que devient la fonction d'utilité intertemporelle ?

Reformulons la fonction d'utilité en prenant pour variables les dépenses de consommation C_0 et C_1.

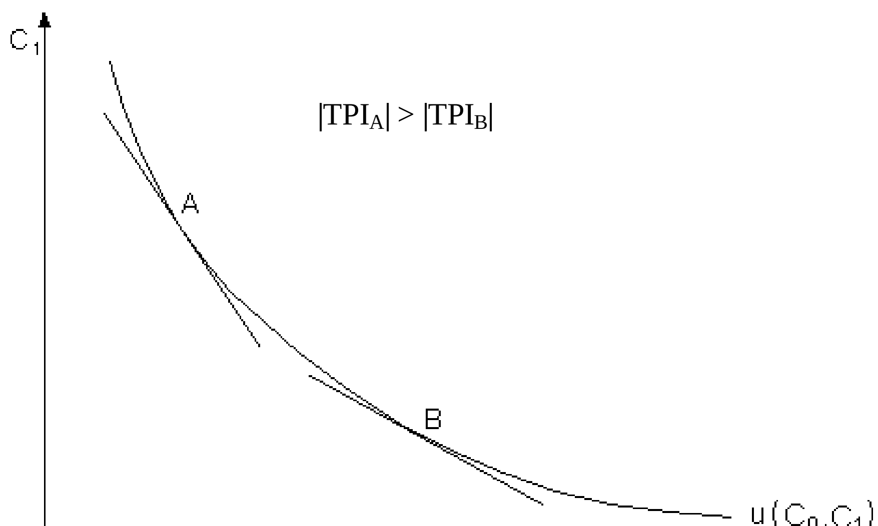
La fonction d'utilité intertemporelle s'écrit:

$$u = u(C_0, C_1)$$

Cette fonction d'utilité exprime les préférences du consommateur à l'égard de la consommation courante et de la consommation future.

À partir de cette fonction d'utilité intertemporelle, il est possible de tracer une courbe d'indifférence intertemporelle dont la pente de la tangente en un point mesure le taux marginal de substitution entre la consommation courante et la consommation future. Ce dernier est appelé taux de préférence intertemporel.

FIGURE 1



Par convention, l'axe horizontale mesure les dépenses de consommation courante et l'axe verticale mesure les dépenses de consommation future. Le consommateur est indifférent entre les diverses combinaisons de C_0 et de C_1 se trouvant sur la même courbe d'indifférence. La pente de la tangente en un point sur la courbe d'indifférence représente le taux de préférence intertemporel.

Définition: Soit $u(C_0,C_1)$ la fonction d'utilité intertemporelle du consommateur. Le **taux de préférence intertemporel**[3] (TPI) mesure la quantité de consommation future C_1 qu'il faut fournir au consommateur pour compenser une diminution d'une unité de consommation courante C_0 de manière à maintenir son niveau d'utilité constant.

La différentielle totale de u s'écrit:

$$du = \frac{\partial u}{\partial C_0} dC_0 + \frac{\partial u}{\partial C_1} dC_1 = 0$$

(on demeure sur la même courbe d'indifférence)

La pente de la tangente en un point est donnée par:

$$\frac{dC_1}{dC_0} = - \frac{(\partial u/\partial C_0)}{(\partial u/\partial C_1)} = TPI$$

Le TPI[4] mesure le nombre d'unités de consommation future que le consommateur est prêt à échanger pour obtenir une unité supplémentaire de consommation présente.

Au numérateur, l'expression $\partial u/\partial C_0$ n'est rien d'autre que l'utilité marginale de la consommation courante. Au dénominateur, nous avons $\partial u/\partial C_1$, c'est-à-dire l'utilité marginale de la consommation future. Le TPI est donc le rapport entre ces deux utilités marginales.

Le TPI est toujours négatif. Toute diminution de consommation courante C_0 sera compensée par une augmentation de consommation future C_1.
Le TPI décroît à mesure que C_0 augmente. Plus on possède de C_0, plus la compensation exigée en terme de C_1 sera faible, et c'est précisément ce que mesure le TPI.

De façon générale, les individus ont tendance à préférer une consommation présente à une consommation future et TPI > 1[5]. Si TPI > 1, c'est dire que $\partial u/C_0 > \partial u/\partial C_1$, ou qu'une unité supplémentaire de consommation courante procure davantage d'utilité qu'une unité supplémentaire de consommation future.

3 On rencontre aussi parfois l'expression "facteur d'escompte subjectif".
4 Certains auteurs définissent plutôt le TPI de la façon suivante: $((\partial u/\partial C_0)/(\partial u/\partial C_1))$ **- 1**.
5 Ceci explique en partie pourquoi on observe toujours des taux d'intérêt positifs.

5.2 Que devient la contrainte budgétaire intertemporelle ?

En utilisant la notation introduite au début de la section 5, la contrainte budgétaire intertemporelle devient:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+i} = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

La somme des dépenses de consommation actualisées du consommateur doit être égale à la somme de ses revenus actualisés.

On a:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+i} = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

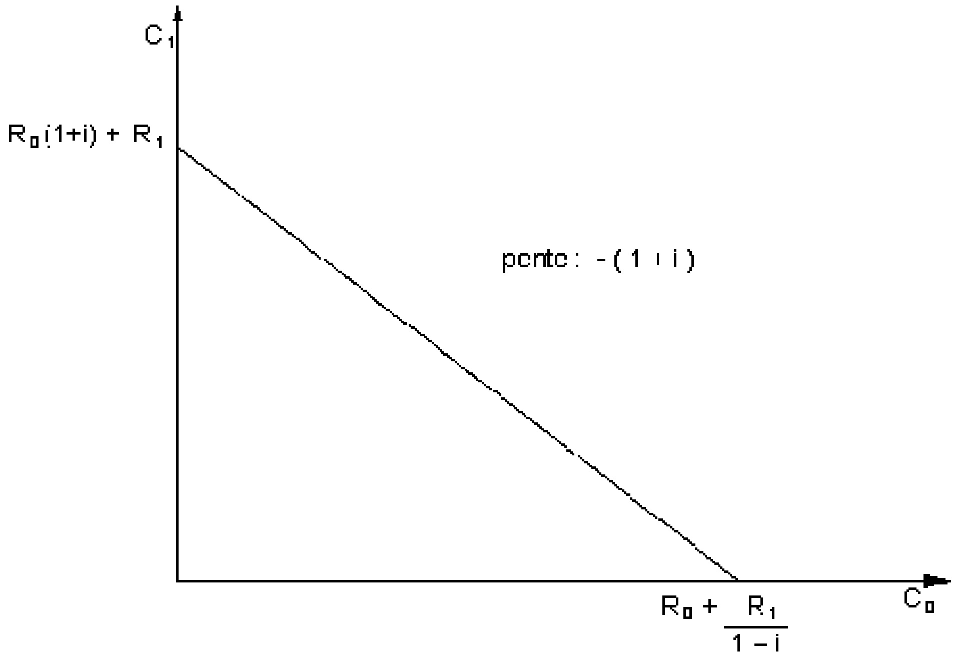
$$\frac{C_1}{1+i} = R_0 + \frac{R_1}{1+i} - C_0$$

$$C_1 = \left(R_0 + \frac{R_1}{1+i} - C_0\right)(1+i)$$

$$C_1 = R_0(1+i) + R_1 - (1+i)\,C_0$$

Nous obtenons l'équation d'une droite de pente -(1+i) et d'ordonnée à l'origine $R_0(1+i)$ + R_1. La figure 2 représente graphiquement la contrainte budgétaire intertemporelle.

FIGURE 2



La contrainte budgétaire intertemporelle représente les combinaisons de consommation courante et de consommation future accessibles au consommateur.

La pente de la contrainte budgétaire est déterminée par le taux d'intérêt i. Elle indique que le coût d'opportunité de 1$ de consommation courante C_0 est de 1+i$ de consommation future C_1.

L'ordonnée à l'origine indique la consommation maximale que l'individu peut effectuer à la période 1 s'il conserve tout son revenu de la période 0.

L'abscisse à l'origine indique pour sa part la consommation maximale que l'individu peut effectuer à la période 0 s'il s'abstient de consommer à la période 1.

<u>Exemple:</u> Si Monsieur Z dispose d'un revenu courant R_0=100$ et d'un revenu futur R_1=500$, et que le taux d'intérêt est de i=10%, quelle est sa contrainte budgétaire

intertemporelle ?

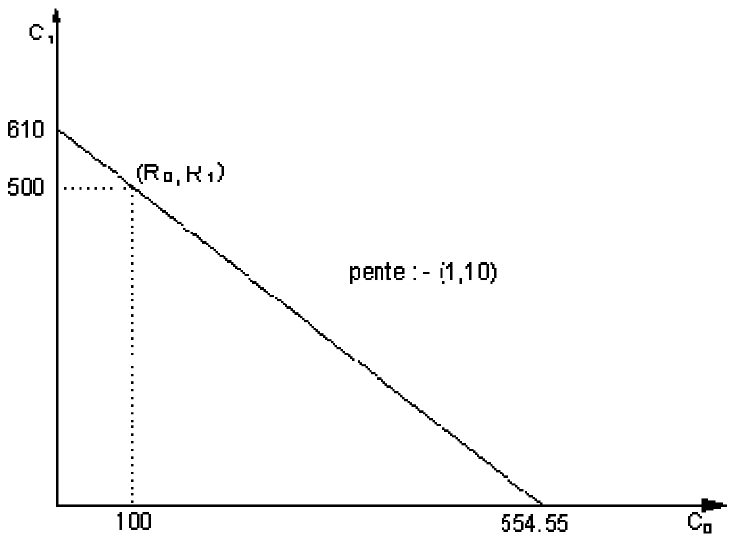
Sa contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+0,10} = 100 + \frac{500}{1+0,10}$$

Trouvons les valeurs à l'origine pour nous permettre de tracer la droite budgétaire. Monsieur Z a la possibilité de tout consommer à la période 0 (C_1=0). Sa consommation courante C_0 sera alors maximale et égale à: 100+(500/(1+0,10))=554,55$.

Monsieur Z a aussi la possibilité de tout consommer à la période 1. Sa consommation future C_1 sera maximale et égale à: 100(1+0,10)+500 = 610$. À partir de ces deux points, il est facile de tracer sa droite budgétaire intertemporelle (figure 3).

FIGURE 3



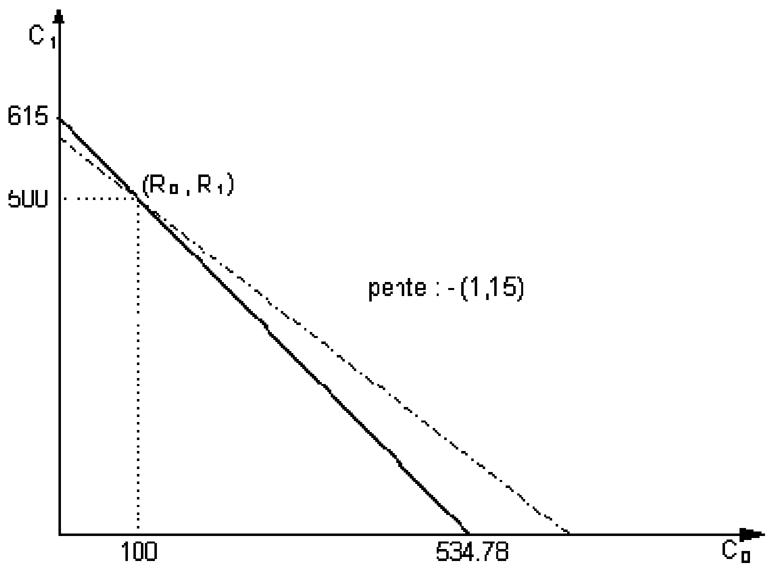
Pour Monsieur Z, n'importe quelle situation intermédiaire est possible, c'est -à-dire qu'il peut atteindre n'importe quel point se situant sur sa droite budgétaire. Bien sûr, sa droite budgétaire passe par le point (R_0=100, R_1=500) car, à ce point, Monsieur Z consomme exactement ce qu'il gagne à chacune des périodes.

Une variation de i fait pivoter la contrainte budgétaire autour du point (R_0,R_1). Peu importe le taux d'intérêt i, le point (R_0,R_1) demeure accessible. Si dans le cas de Monsieur Z, le taux d'intérêt passe de 10% à 15%, que devient sa contrainte budgétaire ?

La contrainte budgétaire s'écrit maintenant:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+0,15} = 100 + \frac{500}{1+0,15}$$

FIGURE 4



L'abscisse à l'origine devient 100+(500/(1+0,15))=534.78.
L'ordonnée à l'origine devient 100(1+0,15)+500=615.

La droite budgétaire passe obligatoirement par le point (100,500).

5.3 Que devient le choix optimal intertemporel ?

Le problème du consommateur s'écrit:

$$MAX \quad u(C_0, C_1)$$

$$\text{sujet à:} \quad C_0 + \frac{C_1}{1+i} = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

Ce qui revient à maximiser le Lagrangien:

$$Max_{C_0, C_1, \lambda} \quad \pounds = u(C_0, C_1) - \lambda\left(C_0 + \frac{C_1}{1+i} - R_0 - \frac{R_1}{1+i}\right)$$

La condition nécessaire d'un maximum de cette fonction exige que les dérivées partielles par rapport à C_0, C_1 et λ soient nulles d'où

$$1) \quad \frac{\delta \pounds}{\delta C_0} = \frac{\delta u}{\delta C_0} - \lambda = 0$$

$$2) \quad \frac{\delta \pounds}{\delta C_1} = \frac{\delta u}{\delta C_1} - \lambda\left(\frac{1}{1+i}\right) = 0$$

$$3) \quad \frac{\delta \pounds}{\delta \lambda} = -\left(C_0 + \frac{C_1}{1+i} - R_0 - \frac{R_1}{1+i}\right) = 0$$

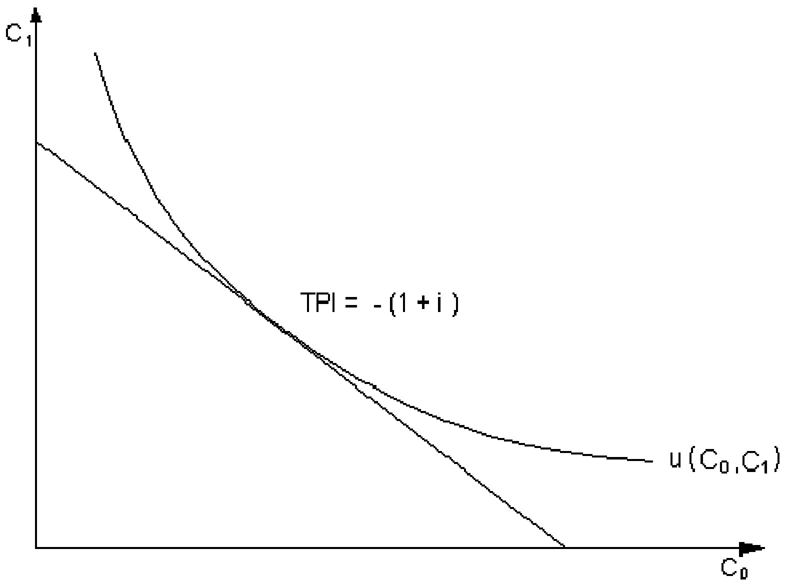
En réarrangeant les termes, les conditions deviennent:

$$\frac{\frac{\delta u}{\delta C_0}}{\frac{\delta u}{\delta C_1}} = (1+i) \qquad c'est\text{-}à\text{-}dire \qquad -TPI = (1-i)$$

$$\text{et} \qquad C_0 + \frac{C_1}{1+i} = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

Le consommateur choisit le point le long de sa contrainte budgétaire qui lui permet d'atteindre la courbe d'indifférence la plus élevée. À ce point, la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire.

FIGURE 5



À l'équilibre, la pente de la tangente à la courbe d'indifférence du consommateur est égale à la pente de sa contrainte budgétaire. À ce point, la valeur personnelle pour l'individu de la consommation courante (C_0) en terme de consommation future (C_1) est la même que celle du marché.

5.4 Prêteur ou emprunteur ?

La contrainte budgétaire intertemporelle implique que le consommateur doit équilibrer ses opérations sur l'ensemble des T périodes; il n'est pas nécessaire que sa consommation corresponde exactement à ses revenus pour chacune des périodes individuelles. La contrainte budgétaire est donc moins forte que dans le cadre statique. Ainsi, il est possible, qu'au cours d'une période donnée, il y ait rupture entre le revenu et les dépenses de consommation. Il faut, par conséquent, qu'il existe un marché des capitaux,[6]c'est-à-dire que le consommateur ait la possibilité, au cours d'une période donnée, de prêter ou d'emprunter la différence entre son revenu et ses dépenses de consommation.

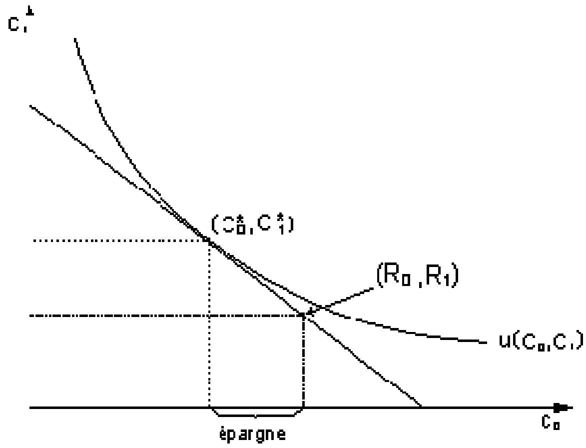
---

[6] Dans notre modèle, ce marché des capitaux est supposé parfait, c'est-à-dire que le taux d'emprunt et de prêt est le même, il n'y a aucun frais de transaction et l'on peut prêter ou emprunter n'importe quel montant sans restriction.

Soit (C_0^*, C_1^*) le choix optimal du consommateur et (R_0, R_1) la distribution initiale de ses revenus.

Un individu est **prêteur** (ou épargnant) à la période courante s'il choisit un point tel que $R_0 > C_0$. Par définition, la différence $R_0 - C_0^*$ est l'épargne de l'individu (figure 6). Graphiquement, un individu est prêteur (ou épargnant) à la période courante si son choix optimal est situé à gauche de ses dotations initiales le long de la droite budgétaire.

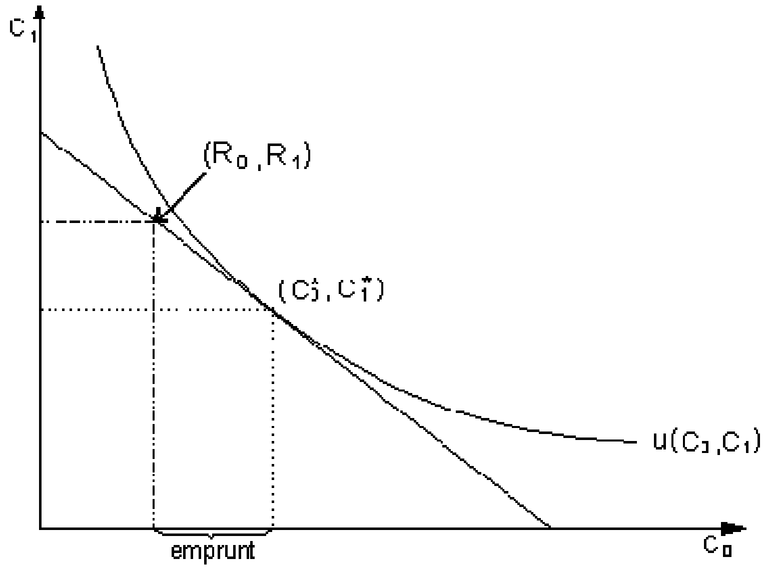
FIGURE 6



Un individu est **emprunteur** à la période courante s'il choisit un point tel que $C_0^* > R_0$. Par définition, la différence $C_0^* - R_0$

est l'emprunt de l'individu (figure 7).

FIGURE 7



Graphiquement, un individu est emprunteur à la période courante si son choix optimal est situé à droite de ses dotations initiales le long de la droite budgétaire.

Si un consommateur est emprunteur à la période courante, il sera nécessairement épargnant à la période future. Le montant qu'il devra rembourser à la période 1 correspond à l'emprunt de la période 0 augmenté des intérêts, c'est-à-dire:

$$R_1 - C_1^* = (C_0^* - R_0)(1+i)$$

5.5 Un exemple numérique

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu courant R_0 et d'un revenu futur R_1. Sa fonction d'utilité intertemporelle est la suivante:

$$u = C_0^{1/3}\, C_1^{1/3}$$

Le problème du consommateur revient à maximiser le lagrangien :

$$Max_{C_0, C_1, \lambda} \quad £ = C_0^{1/3} C_1^{1/3} - \lambda\left(C_0 + \frac{C_1}{1+i} - R_0 - \frac{R_1}{1+i}\right)$$

Les conditions de premier ordre sont:

$$1) \quad \frac{\delta £}{\delta C_0} = \frac{1}{3} C_0^{-2/3} C_1^{1/3} - \lambda = 0$$

$$2) \quad \frac{\delta £}{\delta C_1} = \frac{1}{3} C_0^{1/3} C_1^{-2/3} - \lambda\left(\frac{1}{1+i}\right) = 0$$

$$3) \quad \frac{\delta £}{\delta \lambda} = -\left(C_0 + \frac{C_1}{1+i} - R_0 - \frac{R_1}{1+i}\right) = 0$$

$$1) \rightarrow \qquad \frac{1}{3} C_0^{-2/3} C_1^{1/3} = \lambda$$

$$2) \rightarrow \qquad \frac{1}{3} C_0^{1/3} C_1^{-2/3} (1+i) = \lambda$$

$$d'où \qquad \frac{1}{3} C_0^{2/3} C_1^{1/3} = \frac{1}{3} C_0^{1/3} C_1^{2/3} (1+i)$$

$$ou \qquad \frac{C_1}{C_0} = (1+i)$$

$$ou \qquad C_1 = C_0 (1+i)$$

En remplacant dans (3) on obtient:

$$-(C_0 + \frac{C_0(1+i)}{1+i} - R_0 - \frac{R_1}{1+i}) = 0$$

$$(2C_0 - R_0 - \frac{R_1}{1+i}) = 0$$

$$2C_0 = R_0 + \frac{R_1}{1+i}$$

$$C_0^* = \frac{1}{2}(R_0 + \frac{R_1}{1+i})$$

$$\text{et} \quad C_1 = \frac{1}{2}(R_0 + \frac{R_1}{1+i})(1+i)$$

$$C_1^* = \frac{1}{2}(R_0(1+i) + R_1)$$

Si la fonction d'utilité u= $C_0^{1/3}$ $C_1^{1/3}$ est celle de Monsieur Z (R_0=100 et R_1=500), son choix optimal sera :

$$C_0^* = \frac{1}{2}(100 + \frac{500}{1{,}10}) = 277{,}28$$

$$C_1^* = \frac{1}{2}(100\ (1{,}10) + 500) = 305$$

Puisque Monsieur Z a choisi un point tel que $C_0 > R_0$ (277,28 > 100), il est emprunteur à la période courante. Le montant de son emprunt est de 277,28 - 100 = 177,28$. Le montant qu'il devra rembourser à la période future (R_1 - C_1) correspond à l'emprunt de l'année précédente augmenté des intérêts, c'est-à-dire 177,28(1+0,10)=195$. À la période 1, R_1 - C_1 (500-305) donne bien 195$.